MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 6

(„domácí cvičení“ místo 17.11. - pokuste se promyslet a pak také sepsat řešení aspoň některých problémků nebo příkladů):

1. Dokažte (užitím definice limity posloupnosti) (a důkaz podrobně napište):

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ (zkuste pak i důkaz pomocí věty o limitě sevřené posloupnosti);

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} n(3+\sin n) = \infty$.

2. a) Dokažte: Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu a, má každá podposloupnost tutéž limitu.

   b) Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $b_n = (-1)^n a_n$. Vyšetřete existenci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (můžete užít a)).

3. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení (a dokažte, že platí nebo opravte tak, aby tvrzení platilo) :

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$, ($a \in R$);

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$, ($a \in R$) ;

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ($a \in R$).

4. Dokažte, že platí (důkazy opět sepište podrobně) :

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n.b_n = 0$.

   (A odtud lze pak jednoduše určit např. limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n$)

   b) Jestliže existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \le b_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak také $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

   (A odtud opět lze snadno spočítat $\lim\limits_{n\to\infty} n(3+\sin n)$ a nebo $\lim\limits_{n\to\infty} (n+\sin n)$.)

5. A chcete-li, zkuste promyslet (spočítat) limity (nebo ukažte, že daná posloupnost limitu nemá):

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-1}{2n^2-n+5}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n-14}{2n^2-n+5}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n^3-3n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3n^2+n}$;

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+(-1)^n n!}{-2^n+3\cdot n!}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n-2n!}{n^4+3n^n}$;

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

   e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\dots\dots\dots+\frac{1}{n^2+n}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)$;

   (užití věty o limitě sevřené posloupnosti nebo její analogie pro nevlastní limitu).

6. Dokažte tvrzení: Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a > 0$, pak je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

   (A zvažte, zda tvrzení platí i pro $a = 0$ ($a_n > 0$) .

   A užití: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$.